DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2014.03.001

Smarandache函数在数列 a^p-b^p 上的一个下界估计

高 丽[1],郝虹斐[1,2],鲁伟阳[1]

(1.延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000;
2.榆林市清涧县 店则沟镇九年制学校,陕西 榆林 719000)

摘 要: 研究Smarandache函数在数列 a^p-b^p 上的下界估计问题。利用初等方法和组合方法,证明了估计式 $S(a^p-b^p)\geq 10p+1$,其中 $p\geq 17$ 为任意素数,a 与 b 为任意不同的正整数,且 $a>b$。结论给出了Smarandache函数在数列 a^p-b^p 上的一个较强的下界估计。

关键词: Smarandache函数;下界估计;初等方法;组合方法

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2014)03-0001-03

对于任意的正整数 n,F. Smarandache给出Smarandache函数 $S(n)$ 被定义为最小的正整数 m,使得 $n\mid m!$,即 $S(n)=\min\{m: m\in N_+, n\mid m!\}$。其中 N_+ 表示所有的正整数集合。假设 n 的标准分解式为:$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$,依据 $S(n)$ 的定义易得:$S(n)=\max\limits_{1\leq i\leq t}\left\{S(p_i^{\alpha_i})\right\}$,由此容易通过计算可以得到:$S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,…。而关于函数 $S(n)$ 的初等性质,近几年有许多学者进行了研究,并获得了不少有趣的结论[1-4]。例如陆亚明[1]研究了关于Smarandache函数 $S(n)$ 的方程,并证明了

$$S(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k)=\sum_{i=1}^{k}S(m_i)$$

的可解性问题,并利用解析数论中的三素数定理证明了对于任意正整数 $k\geq 3$,该方程有无数组正整数解 $(m_1,m_2,m_3,\cdots,m_k)$。

此外,一些学者对Smarandache函数 $S(n)$ 在某特殊数列上的下界估计做出研究。其中,苏娟丽[2]研究了 $S(2^p+1)$ 的下界估计问题,证明了:当 $p\geq 17$ 且为素数时,有估计式

$$S(2^p+1)\geq 6p+1。$$

温田丁在文献[3]中更精确了文献[2]的结果,证明了:当 $p\geq 17$ 为素数时,有估计式

$$S(2^p+1)\geq 10p+1,S(2^p-1)\geq 10p+1。$$

文献[4]中石鹏等人则讨论了 $S(n)$ 在特殊数列 a^p+b^p 上的下界估计问题,证明了:当 a 与 b 为任意不同的正整数,$p\geq 17$ 为素数时,有估计式

$$S(a^p+b^p)\geq 10p+1。$$

受到文献[2-4]的启示,本文利用初等方法及组合方法,研究Smarandache函数 $S(n)$ 在特殊数列 a^p-b^p 上的下界估计问题,并获得了一个较强的估计式。从而得到结果为:

定理 设 $p\geq 17$ 为素数,a 与 b 为任意不同的正整数,且 $a>b$,有估计式

$$S(a^p-b^p)\geq 8p+1。$$

1 相关引理

引理1 设 p 为奇素数,对于任意互素的正整数 a 及 b,且 $a>b$,有

$$\left(\frac{a^p-b^p}{a-b},a-b\right)=1,p。$$

收稿日期:2014-05-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZ2013-04);延安大学硕士研究生教育创新计划项目

作者简介:高 丽(1966—),女,陕西绥德人,延安大学教授。

证明　设 $\left(\dfrac{a^p-b^p}{a-b},a-b\right)=d$，$a-b=dk$，

$\dfrac{a^p-b^p}{a-b}=dh$，则有 $(h,k)=1$ 且

$$d^2hk=a^p-b^p=a^p-(a-dk)^p$$
$$=-\sum_{i=1}^{p}C_p^i a^{p-i}(-1)^i(dk)^i$$
$$=pa^{p-1}dk-\sum_{i=2}^{p}C_p^i a^{p-i}(-1)^i(dk)^i \quad (1)$$

由于 $(a,b)=1$，$d|a-b$，所以 $(a,b)=1$，进而由(1)式立刻推出 $d|p$，进而推出 $d=1,p$。

引理2[5]　对任意素数 p，正整数及 α，t 及 n，有

(i) 若 $p|n$，有 $S(n)\geqslant S(p)=p$，

(ii) 若 $\alpha\leqslant p$，有 $S(p^\alpha)=\alpha p$；若 $\alpha>p\geqslant t$，则 $S(p^\alpha)\geqslant S(p^t)\geqslant pt$。

2　定理的证明

本节利用初等方法和组合方法给出定理证明。

由引理2中 Smarandache 函数 $S(n)$ 的性质知：对任意素数 p，若 $p|n$，有 $S(n)\geqslant S(p)$，而且 $p|S(p^\alpha)$ 对任意满足 $\alpha\leqslant p$ 的正整数 α 成立。所以对任意素数 $p\geqslant 17$，令 q 为 a^p-b^p 的任意素因子，显然 $q\geqslant 3$，于是可得 $S(a^p-b^p)\geqslant q$，又因为 $q|a^p-b^p$，因而 $a^p-b^p\equiv 0(\bmod q)$，或者

$$(a\bar{b})^p\equiv 1(\bmod q), \quad (2)$$

因此 p 是 $(a\bar{b})^p$ 模 q 的指标，则由上式及指标的性质[6-7]知

$p|\varphi(q)=q-1$，或者 $q-1=mp$。

由于 q 为奇素数，那么 m 一定是偶数，因而可以设

$$q=2kp+1, k\in N_+。 \quad (3)$$

于是由式(2)知 a^p-b^p 有以下5种可能：

1. a^p-b^p 为 p 的方幂。假设 $a^p-b^p=p^\alpha$，当 $\alpha=2$ 时，有 $a^p-b^p\geqslant 2^p-1\geqslant p^2$，所以 $\alpha\geqslant 3$。由引理1不难推出 $a-b=p^k\cdot\mu$，其中 $k\in N_+$，$(p,\mu)=1$。因为 $a-b|a^p-b^p$，从而 $\mu=1$。当 $\left(\dfrac{a^p-b^p}{a-b},a-b\right)=(p^{\alpha-k},p^k)=1$ 时，有 $k=0$，或 $k=\alpha$，即 $a-b=1$ 或 $a-b=p^\alpha$，此时有

$$S(a^p-b^p)\geqslant a^p-b^p\geqslant q\geqslant 2\cdot 4p+1=8p+1。$$

2. 除 p 以外，a^p-b^p 至少含有4个素因子。由(3)式知，至少存在一个素因子 q，使得 $q=2kp+1$，$k\geqslant 4$，因为当素数 $p\geqslant 5$ 时，$2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数，此时

$$S(a^p-b^p)\geqslant S(q)=q=2kp+1\geqslant 8p+1。$$

3. 除 p 以外，a^p-b^p 仅含有3个素因子 q_1,q_2,q_3。由(3)式可设 $q_1=2k_1p+1$，$q_2=2k_2p+1$，及 $q_3=2k_3p+1$，而当 $p\geqslant 17$ 时，$2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数，则至少存在一个素因子，不妨设为 q_3，此时 $q_3=2k_3p+1\geqslant 8p+1$，$k_3\geqslant 4$，则一定有 $S(a^p-b^p)\geqslant q_3=2k_3p+1\geqslant 8p+1$。

4. a^p-b^p 除 p 以外，仅含有2个素因子。由(3)式知，a^p-b^p 不可能同时包含素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$，因而由(3)式及 $S(n)$ 的性质，可以分为以下形式：

$$a^p-b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)^\gamma;$$
$$a^p-b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta(6p+1)^\gamma。$$

若 $a^p-b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)^\gamma$ 成立，当 $\beta\geqslant 4$ 或 $\gamma\geqslant 2$ 时，由引理2知

$$S(a^p-b^p)\geqslant S((2p+1)^\beta)\geqslant$$
$$\beta(2p+1)\geqslant 4(2p+1)\geqslant 8p+1,$$

或者

$$S(a^p-b^p)\geqslant S((6p+1)^\gamma)\geqslant$$
$$\gamma(6p+1)\geqslant 2(6p+1)\geqslant 8p+1。$$

当 $1\leqslant\beta\leqslant 3$ 或 $\gamma=1$，现在证明在这种情况下，当 $p\geqslant 17$ 时，a^p-b^p 不可能含有 p 的方幂，若不然，当 $\alpha\geqslant 2$ 时，由 Euler-Fermat 定理知：

$a^p\equiv a(\bmod p)$，$b^p\equiv b(\bmod p)$，

即 $a-b=a^p-b^p\equiv 0(\bmod p)$。

令 $a-b=p^k\cdot\mu$，$(p,\mu)=1$，由引理1可得 $k=\alpha$ 或者 $k=\alpha-1$，显然 $a^p-b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)$ 且 $1\leqslant\beta\leqslant 3$，$k=\alpha$ 不可能。因为此时

$$p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)=$$
$$a^p-b^p\geqslant 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^p\geqslant 2\left(\frac{p}{2}\right)^\alpha$$

矛盾。于是可设 $k=\alpha-1$，同样的的方法可以推出矛盾。

当 $\alpha=1$ 时，由于 $a-b\equiv a^p-b^p\equiv 0(\bmod p)$，可以得到 $k=\alpha=1$，此时有 p^2 整除 a^p-b^p 显然这是不成立的。因而 a^p-b^p 不含素因子 p。这样可得到

$$(2p+1)^3(6p+1)>(2p+1)^\beta(6p+1)$$
$$=a^p-b^p。$$

其中 $1\leqslant\beta\leqslant 3$，且 $p\geqslant 17$ 为素数，通过计算得出上式不成立。

同理可证当 $a^p-b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)^\gamma$ 与 $a^p-b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta(6p+1)^\gamma$，素数 $p\geqslant 17$ 时，结论 $S(a^p-b^p)\geqslant 8p+1$ 成立。

5. $a^p - b^p$ 除 p 以外，仅含有1个素因子。因而由(3)式及 $S(n)$ 的性质，可以考虑以下三种形式：

$a^p - b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta$；

$a^p - b^p = p^\alpha(4p+1)^\beta$；

$a^p - b^p = p^\alpha(6p+1)^\beta$。

若 $a^p - b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta$ 成立，当 $\beta \geqslant 4$ 时，由引理2有

$$S(a^p - b^p) \geqslant S((2p+1)^\beta) = 4(2p+1) \geqslant 8p+1。$$

当 $\beta \leqslant 3$ 时，由情况4可知 $a^p - b^p$ 不含素因子 p 的方幂，故当 $\alpha \geqslant 1$ 时，$a^p - b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta$ 且 $1 \leqslant \beta \leqslant 3$ 不成立，故 $a^p - b^p = (2p+1)^\beta$。当 $\beta = 3$，$a^p - b^p = (2p+1)^3$ 时，有

$$a - b \equiv a^p - b^p \equiv (2p+1)^3 \equiv 1 \pmod p。$$

而 $a - b \mid a^p - b^p$，所以可设 $a - b = (2p+1)^n$，由引理1可知

$$\left(\frac{a^p - b^p}{a - b}, a - b\right) = \left((2p+1)^{3-n}, (2p+1)^n\right) = 1。$$

所以 $n = 0, 3$。

即 $a - b = 1$ 或 $a - b = (2p+1)^3 = a^p - b^p$，这与 $(a,b) = 1$ 且 $a \geqslant b+1$，$p \geqslant 17$ 以及 $a - b < a^p - b^p$ 矛盾。显然 $2^p - 1 \leqslant a^p - b^p = (2p+1)^\beta$，由 $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ 与 $p \geqslant 17$。通过计算可得上述不等式不成立。

同理可证：$a^p - b^p = p^\alpha(4p+1)^\beta$ 或 $a^p - b^p = p^\alpha(6p+1)^\beta$ 时定理成立，于是定理得证。

参考文献：

[1] Lu Yaming. On the soulution of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76－79.

[2] 苏娟丽. 关于Smarandache函数的一个下界估计 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(1): 133－134.

[3] 温田丁. Smarandache函数的一个下界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学 2010, 26(3): 413－416.

[4] 石鹏，刘卓. Smarandache函数在数列 上的一个下界估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(8): 10－14.

[5] Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandache Function [J]. Smarandache Notion Journal, 2002, 13(1): 2－3.

[6] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[7] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spring－VErlag, 1976.

[责任编辑 毕 伟]

A Lower Bound Estimate for Smarandache Function on Sequence $a^p - b^p$

GAO LI[1], HAO Hong-fei[1,2], LU Wei-yang[1]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China;
2. Dianzegou Nine－year School, Yulin 719000, China)

Abstract: To study a lower bound estimate problem of Smarandache Function on Sequence $a^p - b^p$. Using the elementary and combinational methods. It is proved the Estimate $S(a^p - b^p) \geqslant 8p+1$, where $p \geqslant 17$ be any prime, a and b are two positive integers with $a > b$. A lower bound estimate of Smarandache Function on Sequence $a^p - b^p$ is given.

Key words: Smarandache function; lower bound estimate; elementary method; combinational method